Une amélioration d'un résultat de E. B. Davies et B. Simon

Rachid Zarouf

Résumé

E. B. Davies et B. Simon ont montré (entre autres résultats) la chose suivante: soit T , une matrice $n \times n$ telle que son spectre $\sigma(T)$ soit inclus dans le disque $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ et soit $C = sup_{n\geq 0} \|T^n\|_{E\to E}$, (E étant $\mathbb{C}^n$ muni d'une certaine norme $|.|$). Alors $\|R(1, T)\|_{E\to E} \leq C\,(3n/dist(1, \sigma(T)))^{3/2}$ où $R(\lambda, T)$ désigne la résolvante de T prise au point λ. Nous améliorons ici cette dernière inégalité à travers le résultat suivant: sous les mêmes conditions (portant sur la matrice T), pour tout $\lambda \notin \sigma(A)$ tel que $|\lambda| \geq 1$, on a $\|R(\lambda, T)\| \leq C\left(5\pi/3 + 2\sqrt{2}\right) n^{3/2}/dist\,(\lambda, \sigma)$.

Sharpening a result by E.B. Davies and B. Simon

Abstract

E. B. Davies et B. Simon have shown (among other things) the following result: if T is an $n \times n$ matrix such that its spectrum $\sigma(T)$ is included in the open unit disc $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ and if $C = sup_{k\geq 0} \left\|T^k\right\|_{E\to E}$, where E stands for $\mathbb{C}^n$ endowed with a certain norm $|.|$, then $\|R(1, T)\|_{E\to E} \leq C\,(3n/dist(1, \sigma(T)))^{3/2}$ where $R(\lambda, T)$ stands for the resolvent of T at point λ. Here, we improve this inequality showing that under the same hypotheses (on the matrix T), $\|R(\lambda, T)\| \leq C\left(5\pi/3 + 2\sqrt{2}\right) n^{3/2}/dist\,(\lambda, \sigma)$, for all $\lambda \notin \sigma(T)$ such that $|\lambda| \geq 1$.

Pour $C \geq 1$ et $n \in \mathbb{N}^\star$ on pose

$$K_n(C) = sup\,\|R(\lambda, T)\|\,dist\,(\lambda, \sigma(T))\,,$$

où la borne supérieure est prise sur l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $|\lambda| \geq 1$ et sur l'ensemble des opérateurs $T : E \to E$ avec $E = (\mathbb{C}^n, |.|)$ et vérifiant $\forall k \in \mathbb{N}$, $\left\|T^k\right\|_{E\to E} \leq C$.

Le but de cette note est de démontrer le théorème suivant.

Théorème. *(i) Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ et pour tout $C \geq 1$, on a*

$$K_n(C) \leq C\left(5\pi/3 + 2\sqrt{2}\right) n^{3/2}.$$

(ii) De plus, pour tout $C \geq 1$ on a

$$limsup_{n\to\infty} n^{-\frac{3}{2}} K_n(C) \leq 5C\pi/3.$$

Commentaires.

(1) Ce théorème est un résultat de nature "numérique" dans la mesure où il s'agit d'une estimation du type $\|R(\lambda, T)\| \leq K dist\,(\lambda, \sigma(T))$, où la question est d'évaluer la taille de la constante $K = K_n(C)$ en fonction des paramètres dont elle dépend, à savoir n et C.

(2) Le résultat principal de E. B. Davies et B. Simon est le suivant, voir [2]: Soit K_n la même borne supérieure que celle donnant $K_n(C)$ en restreignant la condition (C_1) : [$T : E \to E$ *avec* $E = (\mathbb{C}^n, |.|)$ *et vérifiant* $\forall k \in \mathbb{N}$, $\left\|T^k\right\|_{E\to E} \leq C$] par (C_2) : [T *est une contraction d'un espace de Hilbert*]. Alors le facteur $n^{\frac{3}{2}}$ "devient" n et $K_n = cotan(\pi/4n)$.

(3) Dans ce dernier cas (où T est une contraction d'un espace de Hilbert), la méthode appliquée ci-dessous pour montrer le Théorème faisant l'objet de cette note, donne $K_n \leq an$ où $a = (1 + max_{\lambda\in\sigma(T)} |\lambda|)$. En particulier, pour $r = max_{\lambda\in\sigma(T)} |\lambda| < 4/\pi - 1$, cette majoration est plus précise que [2].

(4) En ce qui concerne l'exactitude du véritable ordre de croissance de la constante $K_n(C)$, on sait pour l'instant que $K_n(C)/n \geq K_n/n \geq b$ où $b = (2 + \sqrt{3})/3$, voir [2] p.4.

(5) L'hypothèse du théorème entraîne trivialement que $\|R(\lambda,T)\| \le C\,(|\lambda|-1)^{-1}$, $|\lambda|>1$. Ce théorème peut donc être vu comme un analogue unilatéral du "Lemme de Domar" bien connu (voir [1], [6]): si $\sigma \subset \mathbb{D}$ et u une fonction sous-harmonique dans $\mathbb{C}\setminus\sigma$ telle que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\sigma$, $u(\lambda) \le Cmax\left\{||\lambda|-1|^{-1},\, dist\,(\lambda,\,\sigma)^{-1}\right\}$, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\sigma$, tel que $|\lambda| \ge 1/2$, $u(\lambda) \le 447Cdist\,(\lambda,\,\sigma)^{-1}$. Une version aussi générale pour des estimations unilatérales ($|\lambda|\ge 1$), n'est pas vraie (exemple: $u(\lambda) = \|R(\lambda, M_\theta)\|$, où M_θ est l'opérateur modèle sur $K_\theta = H^2\Theta\theta H^2$, $\theta = exp\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$, voir [4]), mais notre résultat montre qu'elle est correcte pour des résolvantes de matrices de taille n (avec une constante dépendant de n).

Nous avons recours en premier lieu au lemme suivant, de type principe du maximum.

Lemme. *Soient $C\ge 1$, $A>0$ tels que pour tout opérateur T agissant sur $(\mathbb{C}^n, |.|)$ et de spectre $\sigma(T)$, la condition suivante soit réalisée:*

$$\left\{\begin{array}{c} sup_{k\ge 0}\left\|T^k\right\| \le C \\ \sigma(T)\subset\mathbb{D}\end{array}\right. \Longrightarrow \left[\forall\lambda_\star\; tel\,que\; |\lambda_\star|=1,\; dist\,(\lambda_\star,\,\sigma(T))\,\|R\,(\lambda_\star,T)\| \le A\right],$$

alors,

$$K_n(C) \le A.$$

Preuve. Soit λ tel que $|\lambda|>1$. λ peut alors s'écrire $\lambda = \rho\lambda_\star$ avec $\rho>1$ et $|\lambda_\star|=1$. On pose $T_\star = \frac{1}{\rho}T$. Dans ces conditions, $sup_{k\ge 0}\left\|T_\star^k\right\| \le C$ et $\sigma(T_\star) = \frac{1}{\rho}\sigma(T)\subset\mathbb{D}$. Par conséquent, on a $dist\,(\lambda_\star,\,\sigma\,(T_\star))\,\|R\,(\lambda_\star,T_\star)\| \le A$, ce que l'ont peut encore écrire $\rho dist\,(\lambda_\star,\,\sigma\,(T_\star))\left\|\rho^{-1}R\,(\lambda_\star,T_\star)\right\| \le A$. Il suffit maintenant de remarquer que $\rho dist\,(\lambda_\star,\,\sigma\,(T_\star)) = dist\,(\lambda,\,\sigma(T))$ et $\rho^{-1}R\,(\lambda_\star,T_\star) = R(\lambda,T)$.

□

Preuve du Théorème. Soient T une matrice de taille n vérifiant la condition (C_1) et $\sigma = \sigma(T) = \{\lambda_1,\,\lambda_2,\,...,\,\lambda_n\}$ son spectre (les λ_j étant comptés avec leur multiplicité). On défini le produit de Blaschke $B = \Pi_{k=1}^n b_{\lambda_i}$, où pour tout $i=1..n$, $b_{\lambda_i} = \frac{\lambda_i - z}{1-\overline{\lambda_i}z}$. Tout d'abord,

$$\|R(\lambda,T)\| \le C\left\|\frac{1}{\lambda-z}\right\|_{W/BW},$$

(voir [3] Théorème 3.24, p.31), où W est l'algèbre de Wiener des séries de Taylor absolument convergentes, $W = \left\{f = \sum_{k\ge 0}\hat{f}(k)z^k:\ \|f\|_W = \sum_{k\ge 0}\left|\hat{f}(k)\right| < \infty\right\}$ et

$$\left\|\frac{1}{\lambda-z}\right\|_{W/BW} = inf\left\{\|f\|_W:\ f\,(\lambda_j) = \frac{1}{\lambda-\lambda_j},\ j=1..n\right\}.$$

On suppose dans un premier temps que $|\lambda|>1$. Soit P_B la projection orthogonale de l'espace de Hardy H^2 sur $K_B = H^2\Theta BH^2$. La fonction $f = P_B(\frac{1}{\lambda}k_{1/\bar{\lambda}})$ verifie bien $f - \frac{1}{\lambda-z} \in BW$, $\forall\, j=1..n$. En particulier, on a

$$\left\|\frac{1}{\lambda-z}\right\|_{W/BW} \le \left\|\frac{1}{\lambda}P_Bk_{1/\bar{\lambda}}\right\|_W.$$

Mais on sait que

$$P_Bk_{1/\bar{\lambda}} = \sum_{k=1}^n\left(k_{1/\bar{\lambda}},\, e_k\right)_{H^2}e_k$$

où la famille $(e_k)_{k=1}^n$ (appelée base de Malmquist relative à σ, voir [5] p.117) définie par,

$$e_1 = \left(1-|\lambda_1|^2\right)^{\frac{1}{2}}f_1,\ e_k = \left(1-|\lambda_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\Pi_{j=1}^{k-1}b_{\lambda_j}\right)f_k = (f_k/\left\|f_k\right\|_2)\Pi_{j=1}^{k-1}b_{\lambda_j},\ k\ge 2,$$

où $f_k(z) = \frac{1}{1-\overline{\lambda_k}z}$. Du coup,

$$P_B k_{1/\bar{\lambda}} = \sum_{k=1}^{n} \overline{e_k\left(1/\bar{\lambda}\right)} e_k.$$

Nous allons maintenant appliquer l'inégalité de Hardy $\|f\|_W \leq \pi \|f'\|_{H^1} + |f(0)|$, (voir N. Nikolski, [4] p. 370 8.7.4 -(c)) à $P_B k_{1/\bar{\lambda}}$ en profitant du fait remarquable que pour $k = 2..n$

$$e_k' = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{b_{\lambda_i}'}{b_{\lambda_i}} e_k + \overline{\lambda_k} \frac{1}{\left(1-\overline{\lambda_k}z\right)} e_k.$$

On trouve alors

$$\left(P_B k_{1/\bar{\lambda}}\right)' = \left(k_{1/\bar{\lambda}},\, e_1\right)_{H^2} \frac{\bar{\lambda}_1}{\left(1-\overline{\lambda_1}z\right)} e_1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{b_{\lambda_i}'}{b_{\lambda_i}} \sum_{k=i+1}^{n-1} \left(k_{1/\bar{\lambda}},\, e_k\right)_{H^2} e_k + \sum_{k=2}^{n} \left(k_{1/\bar{\lambda}},\, e_k\right)_{H^2} \overline{\lambda_k} \frac{1}{\left(1-\overline{\lambda_k}z\right)} e_k.$$

Comme $k_{1/\bar{\lambda}}$ est le noyau reproduisant de H^2 associé au point $1/\bar{\lambda} \in \mathbb{D}$, on trouve $\left(e_k,\, k_{1/\bar{\lambda}}\right)_{H^2} = e_k(1/\bar{\lambda})$, et donc

$$\left(P_B k_{1/\bar{\lambda}}\right)' = \overline{e_1\left(1/\bar{\lambda}\right)} \frac{\bar{\lambda}_1}{\left(1-\overline{\lambda_1}z\right)} e_1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{b_{\lambda_i}'}{b_{\lambda_i}} \sum_{k=i+1}^{n-1} \overline{e_k\left(1/\bar{\lambda}\right)} e_k + \sum_{k=2}^{n} \overline{e_k\left(1/\bar{\lambda}\right)}\, \overline{\lambda_k} \frac{1}{\left(1-\overline{\lambda_k}z\right)} e_k.$$

Maintenant,

$$\left\| e_1\left(1/\bar{\lambda}\right) \frac{\lambda_1}{\left(1-\overline{\lambda_1}z\right)} e_1 \right\|_{H^1} \leq \left| e_1\left(1/\bar{\lambda}\right) \right| \left\| \frac{\lambda_1}{\left(1-\overline{\lambda_1}z\right)} \right\|_{H^2} \|e_1\|_{H^2} \leq |\lambda| \frac{1}{dist\left(\lambda,\, \sigma\right)}$$

en utilisant à la fois l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le fait que e_1 est de norme 1 dans H^2. Par la même raison (la famille $(e_k)_{k=1}^n$ est orthonormale dans H^2), on trouve

$$\left\| \sum_{k=2}^{n} \overline{\lambda_k}\, \overline{e_k\left(1/\bar{\lambda}\right)} \frac{1}{\left(1-\overline{\lambda_k}z\right)} e_k \right\|_{H^1} \leq \sum_{k=2}^{n} \left| e_k\left(1/\bar{\lambda}\right) \right| \left\| \lambda_k \frac{1}{\left(1-\overline{\lambda_k}z\right)} \right\|_{H^2} \|e_k\|_{H^2} \leq$$

$$\leq \sum_{k=2}^{n} \left| \frac{\left(1-|\lambda_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}}{1-\overline{\lambda_k}/\bar{\lambda}} \right| \frac{1}{\sqrt{1-|\lambda_k|^2}} \leq |\lambda| \frac{(n-1)}{dist\left(\lambda,\, \sigma\right)}.$$

Finalement,

$$\left\| \sum_{i=1}^{n-1} \frac{b_{\lambda_i}'}{b_{\lambda_i}} \sum_{k=i+1}^{n} \overline{e_k\left(1/\bar{\lambda}\right)} e_k \right\|_{H^1} \leq \sum_{i=1}^{n-1} \left\| \frac{b_{\lambda_i}'}{b_{\lambda_i}} \right\|_{L^2} \left(\sum_{k=i+1}^{n} \left| e_k\left(1/\bar{\lambda}\right) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Comme en outre on a $b_{\lambda_i}'/b_{\lambda_i} = 1/\left(\lambda_i - z\right) + \overline{\lambda_i}/\left(1-\overline{\lambda_i}z\right)$, on en déduit que $\left\| b_{\lambda_i}'/b_{\lambda_i} \right\|_{L^2} \leq 2/\sqrt{1-|\lambda_i|^2}$, et que

$$\left\| \sum_{i=1}^{n-1} \frac{b_{\lambda_i}'}{b_{\lambda_i}} \sum_{k=i+1}^{n} \overline{e_k\left(1/\bar{\lambda}\right)} e_k \right\|_{H^1} \leq 2 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\left(1-|\lambda_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}} \left(\sum_{k=i+1}^{n} \left| \frac{\left(1-|\lambda_k|^2\right)}{\left(1-\overline{\lambda_k}/\bar{\lambda}\right)^2} \right| \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Maintenant, sans perte de généralité on peut supposer que la suite $(|\lambda_i|)_{i=1}^n$ est croissante (quitte à réordonner la séquence σ). Dans ce cas, pour $k \geq i+1 > i$ on a $1-|\lambda_k|^2 \leq 1-|\lambda_i|^2$ ce qui donne

$$\left\| \sum_{i=1}^{n-1} \frac{b_{\lambda_i}'}{b_{\lambda_i}} \sum_{k=i+1}^{n} \overline{e_k\left(1/\bar{\lambda}\right)} e_k \right\|_{H^1} \leq 2 \sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{k=i+1}^{n} \left| \frac{1}{\left(1-\overline{\lambda_k}/\bar{\lambda}\right)^2} \right| \right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq 2\frac{|\lambda|}{dist\,(\lambda,\,\sigma)}\sum_{i=1}^{n-1}\left(\sum_{k=i+1}^{n}1\right)^{\frac{1}{2}}\leq\frac{4}{3}\,|\lambda|\,\frac{1}{dist\,(\lambda,\,\sigma)}\left(n^{\frac{3}{2}}-1\right),$$

puisque $\sum_{i=1}^{n-1}\sqrt{j}\leq\int_1^n\sqrt{x}dx$. Finalement,

$$\left\|\left(\frac{1}{\lambda}P_Bk_{1/\bar{\lambda}}\right)'\right\|_{H^1}\leq\frac{1}{dist\,(\lambda,\,\sigma)}+\frac{(n-1)}{dist\,(\lambda,\,\sigma)}+\frac{4}{3}\frac{n^{\frac{3}{2}}-1}{dist\,(\lambda,\,\sigma)}=$$

$$=\frac{1}{dist\,(\lambda,\,\sigma)}\left(-\frac{4}{3}+n+\frac{4}{3}n^{\frac{3}{2}}\right)\leq\frac{5}{3}\frac{n^{\frac{3}{2}}}{dist\,(\lambda,\,\sigma)},$$

la dernière inégalité reposant sur le fait que pour tout $x\geq 0$, $\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}-x+\frac{4}{3}\geq 0$. Ceci donne

$$\left\|\frac{1}{\lambda}P_Bk_{1/\bar{\lambda}}\right\|_W\leq\frac{5}{3}\pi\frac{n^{\frac{3}{2}}}{dist\,(\lambda,\,\sigma)}+\left|\frac{1}{\lambda}\right|\sum_{k=1}^{n}\left|e_k\left(1/\bar{\lambda}\right)\right|\left|e_k(0)\right|\leq\frac{5}{3}\pi\frac{n^{\frac{3}{2}}}{dist\,(\lambda,\,\sigma)}+2n.$$

En particulier, (ii) est démontré. Pour résumer, on a pour $n\geq 1$,

$$\|R(\lambda,T)\|\leq C\left(5\pi/3+\frac{2}{\sqrt{n}}dist\,(\lambda,\,\sigma)\right)\frac{n^{\frac{3}{2}}}{dist\,(\lambda,\,\sigma)}.$$

Faisons maintenant tendre radialement λ vers sa projection $\lambda_\star$ sur le tore $\mathbb{T}$ et remarquons qu'alors, (puisque $dist\,(\lambda_\star,\,\sigma)\leq 2$),

$$\|R\,(\lambda_\star,T)\|\leq C\left(5\pi/3+2\sqrt{2}\right)\frac{n^{\frac{3}{2}}}{dist\,(\lambda_\star,\,\sigma)}.$$

Il reste alors à appliquer le lemme avec $A=\left(5\pi/3+2\sqrt{2}\right)n^{\frac{3}{2}}$ pour achever la preuve de (i).

$\square$

Remerciements

Je tiens à remercier infiniment le Professeur Nikolai Nikolski pour ses conseils ô combien précieux.

References

[1] Y. Domar, *On the existence of a largest subharmonic minorant of a given function*, On the existence of a largest subharmonic minorant of a given function, 3 (1958), 429–440
[2] E. B. Davies and B. Simon, *Eigenvalue estimates for non-normal matrices and the zeros of random orthogonal polynomials on the unit circle*, J. Approx. Theory 141-2, (2006), 189–213.
[3] N.Nikolski, *Condition Numbers of Large Matrices and Analytic Capacities,* St. Petersburg Math. J., 17 (2006), 641-682.
[4] N.Nikolski, *Operators, Function, and Systems: an easy reading*, Vol.1. AMS, Providence, 2002.
[5] N.Nikolski, *Treatise on the shift operator*, Springer-Verlag, Berlin etc., 1986.
[6] N. Nikolski, and S. A. Khrushchev, *function model and some problems in the spectral theory of functions*, Trudy Mat. Inst. Steklov. 176, (1987), 97–210 (Russian). English transl.: Proc. Steklov Inst. Math. (1988), 101–214.

Equipe d'Analyse et Géométrie,
Institut de Mathématiques de Bordeaux,
Université Bordeaux, 351 Cours de la Libération, 33405 Talence, France.
E-mail address: rzarouf@math.u-bordeaux1.fr